KiTaFachtexte

Wo Piaget irrte – Zahlbegriffsentwicklung im Vorschulalter

von Thomas Royar

ALICE SALOMON HOCHSCHULE BERLIN
University of Applied Sciences

FRÖBEL
Kompetenz für Kinder

wiff
Weiterbildungsinitiative
Frühpädagogische Fachkräfte

KiTa Fachtexte ist eine Kooperation der Alice Salomon Hochschule, der FRÖBEL-Gruppe und der Weiterbildungsinitiative Frühpädagogische Fachkräfte (WiFF). Die drei Partner setzen sich für die weitere Professionalisierung in der frühpädagogischen Hochschulausbildung ein.

Wo Piaget irrte – Zahlbegriffsentwicklung im Vorschulalter

von Thomas Royar

ABSTRACT

Die Zahlbegriffsentwicklung beim Kind, also die Frage, wie Kinder lernen, auf welche Bedeutungen das Konstrukt „Zahl" verweist, rückte erst mit den bahnbrechenden Arbeiten Jean Piagets in den Fokus der Aufmerksamkeit. Allerdings kristallisierte sich in der Folge zunehmend heraus, dass, anders als von Piaget beschrieben, konstituierende Elemente bereits in frühester Kindheit erworben werden, insbesondere die sogenannten protoquantitativen Schemata. Obwohl hierüber mittlerweile gesicherte Erkenntnisse vorliegen, haben diese nicht in gleichem Maße in die Praxis Einzug gehalten wie Piagets Erkenntnisse, die teilweise revidiert werden müssen. Die Schemata werden im Artikel näher erläutert, ihre Bedeutung für das Zahlenverständnis skizziert und Möglichkeiten aufgezeigt, bei Kindern diese Schemata praktisch zu aktivieren.

GLIEDERUNG DES TEXTES

INFORMATIONEN ZUM AUTOR

Dr. Thomas Royar ist Dozent an der Pädagogischen Hochschule der Nordwestschweiz im Institut für Vorschule und Unterstufe. Seine Arbeitsschwerpunkte sind Entwicklung und Diagnose des mathematischen Denkens bei Kindern und dessen adäquate Unterstützung, Rechenschwäche und Verständnis arithmetischer Operationen.

1. Piaget und die Entwicklung des Zahlbegriffs

Die Diskussion über frühe mathematische Bildung ist im deutschsprachigen Raum bis heute entscheidend von den Arbeiten des Schweizer Psychologen Jean Piaget geprägt. Seine Theorie der geistigen Entwicklung war dermaßen bahnbrechend, dass sie auch in Bereichen, in denen schon relativ bald neuere Forschungsergebnisse vorlagen, bestimmend blieb. So werden zum Teil bis heute Elemente seiner Theorie zur „Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde“, auf Deutsch erstmals 1941 veröffentlicht (Piaget/Szeminska 1972; Neuauflage), weitergetragen, obwohl bereits seit Beginn der 1980er Jahre im angloamerikanischen Sprachraum differenziertere Untersuchungen, besonders auch im Hinblick auf die Kompetenzen jüngerer Kinder, vorliegen. Erst seit den 1990er Jahren werden die Ergebnisse dieser Untersuchungen und die daraus resultierenden Erkenntnisse auch zunehmend hierzulande wahrgenommen.

Der entscheidende Unterschied zwischen der Piagetschen Theorie und neueren Arbeiten liegt darin, dass für Piaget die Ausbildung eines stabilen Zahlbegriffs, dessen Zeitpunkt er frühestens um das sechste Lebensjahr verortet, nicht möglich ist, ohne dass zuvor eine Reihe von kontextunabhängigen Fähigkeiten erworben wurden (vgl. Hasemann, S. 10). Bemühungen, Kinder in dieser Entwicklung zu fördern, sollten sich folglich auf Präkonzepte wie Klassifizierung und Seriation konzentrieren. Diese wiederum nannte Piaget als Voraussetzungen, überhaupt Vorstellungen von Kardinalität (Zahlen als Anzahlen) und Ordinalität (Zahlen zur Bezeichnung von Rangfolgen) zu entwickeln, ohne die ihrerseits kein Zahlverständnis möglich sei. Erst durch die Verbindung von Kardinalität, Ordinalität und Mengeninvarianz erwirbt sich das Kind den Zahlbegriff und erst in diesem Zusammenhang ergibt auch das Aufsagen der Zahlwortreihe einen Sinn, der über eine reine vershafte Silbenfolge hinausgeht. Diese Elemente entwickeln sich laut Piaget relativ unabhängig von äußeren Einflüssen und sind eher gestufte Reifungs- als Lernprozesse. Diese Sichtweise gilt als überholt, da Piaget seine Untersuchungen in sehr speziellen Kontexten durchgeführt hat, während man die hohe Kontextabhängigkeit seiner Aufgabenstellungen bei Wiederholungen nachweisen konnte.

Differenziertere Modelle

Dass sich auch das Verständnis von der Bedeutung der Zahlwörter wesentlich differenzierter entwickelt und auch bei der Verwendung im Kindergartenalter mehr ist als nur ein bedeutungsarmes „Versaufsagen“ ist spätestens seit den Untersuchungen von Gelman und Gallistel 1978 bekannt. Diese Wissenschaftler arbeiteten durch systematische Analyse heraus, dass allein bei ihrer korrekten Verwendung zum Bestimmen von Anzahlen bereits mehrere Prinzipien zu berücksichtigen sind, die Kinder aber in aller Regel schon im Vorschulalter auch ohne Instruktionen durch Erwachsene lernen.

Tatsächlich hat Piaget bei genauerer Betrachtung die Bedeutung von Invarianz, Kardinalität und Ordinalität insgesamt weniger von den Schemata der Kinder aus entwickelt (obwohl er hier wesentliche Pionierarbeit geleistet hat) als aus dem mathematischen Zahlbegriff abgeleitet. Dies verkennt aber, dass nachgelagerte Kriterien zwangsweise erst a posteriori (hinterher, auf Grundlage von Erfahrungen) beobachtbar sind, wobei die eigentlich entscheidende Frage allerdings diejenige ist, woraus sie sich a priori (ohne Grundlage von Erfahrungen) schon beim Kind entwickeln.

2. Protoquantitative Schemata

Lauren B. Resnick entwarf in den 1980er Jahren ein differenzierteres Modell der Zahlbegriffsentwicklung unter Berücksichtigung zahlbezogener Aspekte auch in Verbindung mit sprachlichen Ausdrücken wie „mehr", „weniger" und „gleich". Können Kinder mit dem Erwerb der Sprache diese Begriffe verständig auf Mengen anwenden, bleibt kein Grund anzunehmen, dass bei ihnen dennoch Defizite in der Invarianzvorstellung vorhanden sind. Somit fällt die Ausbildung des Zahlbegriffs, oder zumindest wesentliche Aspekte desselben, bereits in die Zeit des Spracherwerbs und nicht in diejenige der Vorschulzeit.

Resnick (Resnick 1983) identifiziert drei sogenannte protoquantitative (sinngemäß „vorzahlige") Schemata, die als wesentliche Pfeiler des Zahlenverständnisses gelten können. Es sind dies:

- *Das protoquantitative Vergleichsschema (comparison schema)*
- *Das protoquantitative Zunahme-Abnahme-Schema (increase-decrease-schema)*
- *Das protoquantitative Teile-Ganzes-Schema (part-whole-schema).*

Im Folgenden werden diese Schemata (angeborene Verhaltensmuster, über die zum Teil sogar bereits höher entwickelte Tiere wie Primaten, Delfine oder Krähen und Papageien verfügen) näher erläutert, ihre Bedeutung für die weitere Zahlbegriffsentwicklung skizziert und daraus Fördermöglichkeiten für Drei- bis Fünfjährige abgeleitet.

1.1 Schema des Vergleichs

Sprachlich drückt sich dieses Schema durch die Begriffe „mehr/weniger“ und „gleich“ aus. Kinder verfügen (mit Einschränkungen) über die Fähigkeit, Mengen auch dann zu vergleichen, wenn sie (noch) nicht in der Lage sind, diese auszuzählen. Dies funktioniert zuverlässig bei Mengen bis zu vier Elementen. Im Falle des mehr / weniger gelingt es auch dann, wenn die Anzahlen deutlich so zu unterscheiden sind, dass sie unterschiedlichen Kategorien zuzuordnen sind.

Was ist wenig, viel, sehr viel?

Dabei werden die drei Grobkategorien „wenig“ (bis etwa vier), „viel“ (etwa acht bis fünfzehn) und „sehr viel“ (etwa mehr als dreißig) unterschieden. Ein Kind, das noch nicht in der Lage ist zu zählen, kann also typischerweise eine Menge mit vier Elementen als „mehr“ gegenüber einer Menge von zwei oder drei Elementen beschreiben, wohingegen ihm dieser Vergleich zwischen einer Menge mit neun Elementen und einer Menge mit zwölf Elementen nicht gelingt. Eine Menge mit zehn Elementen kann es wiederum als „mehr“ gegenüber einer Menge mit vier erkennen und eine Menge mit fünfunddreißig ebenso als „mehr“ gegenüber einer Menge von einem Dutzend. Dass Kinder trotzdem bei entsprechenden Aufgaben beginnen zu zählen, liegt oft darin begründet, dass die Kinder entsprechende Aufgabenstellungen als implizite Aufforderung zum Zählen begreifen. Eine Frage wie „Kannst du mir sagen, ob hier oder da mehr Dinge sind, ohne zu zählen?“ bringt dann oft Klarheit.

1.2 Schema der Zu- und Abnahme

Auch dieses Schema ist eng mit den Begriffen „mehr“, „weniger“ und „gleich“ verbunden, allerdings gibt es einen entscheidenden Unterschied. Steht beim Vergleich das „mehr, weniger oder gleich viel SEIN“ im Mittelpunkt, fokussiert die Aufmerksamkeit hier auf die Veränderung, nämlich das „mehr oder weniger WERDEN“ respektive das „gleich BLEIBEN“. Dem eher statischen und räumlich-simultanen Vergleichen steht hier ein eher dynamischer, zeitlich-sukzessiver Differenzierungsprozess entgegen. Kinder sind schon sehr früh in der Lage, entsprechende Mengenveränderungen zu erkennen (besonders eindrucksvoll sind dazu die Experimente von Karen Wynn, die zeigen konnte, dass bereits Säuglinge über ein intuitives Wissen zu Mengenveränderungen verfügen) und mit zunehmender Entwicklung der Sprache auch zu beschreiben. Wie beim Mengenvergleich ist auch hier zu unterscheiden zwischen kleinen Anzahlen, bei denen dies sehr früh zuverlässig gelingt und größeren Anzahlen, bei denen auch die Veränderungen deutlicher sein müssen, um entsprechend auch ohne Zählvorgänge erkannt zu werden. Es gibt einen berühmten Invarianzversuch von Piaget, bei dem Vorschulkinder angeblich eine Menge als „mehr“ identifizieren, wenn man nur den Abstand der Elemente vergrößert. Dies steht in scheinbarem

Mehr oder weniger „werden“ statt „sein“

Widerspruch zu dieser Aussage, allerdings gilt Piagets Interpretation, dass die entsprechende Antwort der Kinder als Indiz für eine fehlende Invarianzvorstellung zu werten ist, schon seit Jahrzehnten als unzutreffend (vgl. Moser-Opitz 2008, S. 42 ff.), denn es handelt sich eher um ein Verständigungsproblem zwischen Erwachsenem und Kind als um ein Verständnisproblem des Kindes.

1.3 Teile-Ganzes-Schema

Ausgehend von Handlungserfahrungen erwirbt ein Kind im Alter von etwa vier Jahren eine Vorstellung davon, dass sich Mengen in Teilmengen zerlegen lassen, ohne dass sich dabei die Gesamtmenge selbst quantitativ verändert. Sprachlich anspruchsvoller geht es dabei um ein Bilden von „Portionen“ oder einem „Aufteilen“, wobei die Teile unterschiedlich sind und variiert werden können. Zwischen den Teilen kann man ausgleichen, ohne die Gesamtmenge dabei zu verändern (Kompensation): Wenn z. B. eine Gabel von einer Schublade in eine andere wandert, dann ist in der zweiten Schublade zwar eine Gabel mehr, aber „dafür“ fehlt sie in der ersten, und insgesamt sind es immer noch genauso viele Gabeln. Verschwindet nun aber eine Gabel aus einer der Schubladen ganz, so fehlt sie nicht nur in der Schublade, in der sie war, sondern es ist dann auch „insgesamt“ eine Gabel weniger (Kovarianz).

Kompensation und Kovarianz

Das Schema verbindet statische und dynamische Vorstellungen miteinander: Die Anzahl des Ganzen bleibt gleich, die Anzahlen der Teile verändern sich, aber nicht unabhängig voneinander. Umgekehrt kann sich die Anzahl des Ganzen nur ändern, wenn sich (mindestens) die Anzahl eines Teiles ändert. Durch die Untergliederung einer Gesamtmenge in Teilmengen erfährt man immer auch etwas über die Gesamtmenge selbst. So gibt es beispielsweise bei größeren Mengen immer auch mehr Möglichkeiten des Unterteilens als bei kleineren Mengen. Die Gliederung einer Menge in ihre Einheiten veranschaulicht schließlich wiederum das Enthaltensein von so vielen Teilmengen der Mächtigkeit eins wie es der Mächtigkeit der Gesamtmenge entspricht, eine Fünfermenge zum Beispiel enthält immer fünf Einermengen. Das ist weniger banal als es auf den ersten Blick vielleicht erscheinen mag.

Aus dem Teile-Ganzes-Schema entwickelt sich das Teile-Ganzes-Konzept, das nicht nur für den Zahlbegriff, sondern auch für eine Vielzahl mathematischer Operationen fundamental ist.

3. Bedeutung der Schemata für die Zahlbegriffsentwicklung

3.1 Vergleichsschema: Kategorienbildung

Eins-zu-Eins-Zuordnung

Auf einem Tisch liegen vier Messer, vier Gabeln und drei Löffel. Spontan assoziieren wir „Da fehlt ein Löffel" oder „Da sind ein Messer und eine Gabel zu viel". Weshalb? Den Löffeln sieht man das vermeintliche „Fehlen" nicht an, ihre Anzahl ist keine gegenständliche Eigenschaft. Erst durch die Abstraktion auf die Anzahl und deren Vergleich wird die Idee der Zahl als Kategorie lebendig. Indem wir eine (mentale) Eins-zu-Eins-Zuordnung von Elementen unterschiedlicher Mengen vornehmen, können wir Gleichheit und Differenz unterscheiden: Bei der Gleichheit „geht" diese Zuordnung „auf", bei einer Differenz „bleibt" etwas ohne „Partner" übrig. Zahlen sind in diesem Zusammenhang genau ausdifferenzierte Kategorien. Ohne eine vergleichende Zuordnung mit Attributen wie „weniger", „mehr" und „gleich" bleibt eine Anzahl ohne Bedeutung.

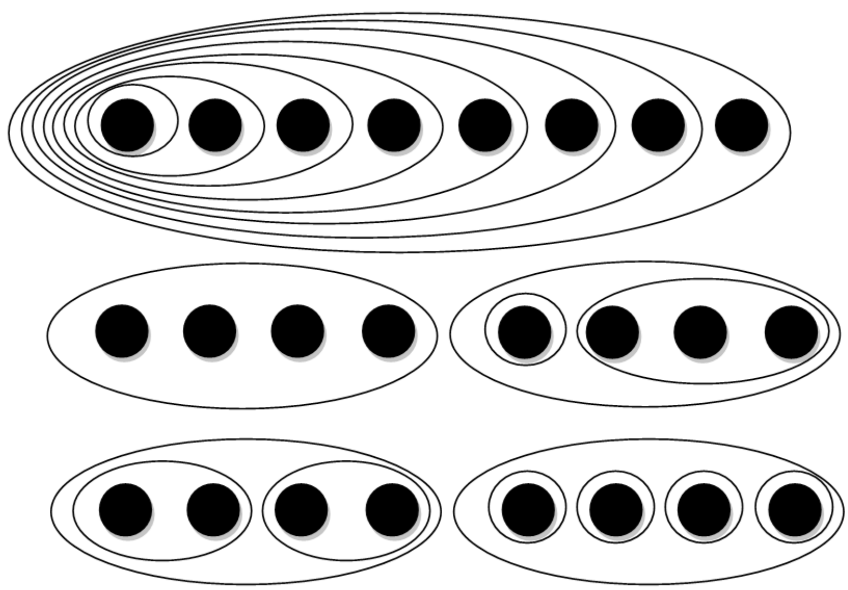
3.2 Zunahme-Abnahme-Schema: Stabile Reihenfolgen

Nimmt man aus einer Menge mit vier Elementen ein Element weg, erhält man stets eine Menge mit drei Elementen, fügt man ein Element hinzu, hat die neu entstandene Menge immer fünf Elemente. Auch das ist keine einfache banale Feststellung: Nicht-diskrete, d. h. nicht augenscheinlich aus einzelnen Elementen bestehende Quantitäten wie zum Beispiel Wasser zeigen diese Gesetzmäßigkeit nicht. Eine Pfütze bleibt eine Pfütze, auch wenn einige Tropfen Wasser dazukommen oder weggenommen werden. Das deutsche Wort „Menge" erweist sich dabei als nicht trennscharf, denn umgangssprachlich kann durchaus von „einer Menge Wasser" gesprochen werden, obwohl der mathematische Mengenbegriff in diesem Kontext unpassend ist. Das Zunahme-Abnahme-Schema meint dabei nicht die Fähigkeit, einfaches „Mehrwerden" oder „Wenigerwerden" zu erkennen, sondern dieses bereits bezogen auf Mengen im mathematischen Sinn. So führt ein „Dazukommen" zu einer größeren Zahl und ein „Weggehen" zu einer kleineren Zahl, ein „Dazukommen von einem Element" genau zur nachfolgenden, ein „Weggehen von einem Element" genau zur vorhergehenden Zahl.

3.3 Teile-Ganzes-Schema: Zahlen bestehen aus Zahlen

Eine Tafel Schokolade ist eine Tafel Schokolade, und wenn man sie zerbricht, so werden daraus nicht zwei Tafeln Schokolade, sondern nur zwei Teile. Und obwohl beide Teile kleiner sind als die ursprüngliche Tafel, so ist allein durch das Auseinanderbrechen die Schokolade nicht weniger geworden. Anders als bei mathematischen Mengen hat sich aber die Zahl der Stücke geändert, aus einem sind zwei geworden. Elemente einer Menge sind per Definition nicht weiter teilbar, daher passt das Beispiel besser, wenn man statt von einer Tafel Schokolade von einer Menge von beispielsweise 16 Schokoladestückchen spricht, die selbst nicht mehr verkleinert werden. Für die Gesamtmenge spielt es dabei nun keine Rolle, ob diese 16 Elemente in Form einer Tafel zusammenhängen oder anderweitig aufgeteilt sind. Jede mögliche Teilmenge enthält dabei maximal 16 Elemente, niemals mehr. Und alle Teilmengen zusammen enthalten immer genau 16 Elemente. Bei jüngeren Kindern beschränkt sich dieses Wissen noch auf kleine Anzahlen, geht dabei aber sogar noch über den Invarianzbegriff hinaus. Vier Elemente bleiben nicht nur vier Elemente, unabhängig davon, ob man sie nahe beieinander oder weiter voneinander entfernt platziert, sondern sie ermöglichen die immer gleichen Aufteilungen: 4, 3/1, 2/2, 2/1/1 und 1/1/1/1. Diese Teilungen korrespondieren unmittelbar mit Termen wie 4, 3+1, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1 und darüber hinaus auch mit Termen wie 4-4, 4-3-1, 4-2-2, 4-2-1-1 und 4-1-1-1-1.

In den (natürlichen) Zahlen „stecken“ alle kleineren Zahlen



4. Möglichkeiten der Förderung

4.1 Vergleichen und nach Anzahl differenzieren

„Sind genug (Becher, Stühle, Äpfel, Kleiderhaken,…) für alle da?“ ist eine simple, aber wirkungsvolle Frage, die Aufmerksamkeit auf Anzahlen zu lenken, ohne sie explizieren zu müssen. Auch der bewusste Umgang mit den Begriffen „mehr“, „weniger“ und „gleichviel“ ist zusätzlich zur sprachlichen Förderung ebenfalls mathematische Sensibilisierung, wenn er sich auf diskrete Mengen bezieht.

Schublade, Box, Truhe

Möglicherweise werden im Kindergarten die Scheren in einer Schublade aufbewahrt, Buntstifte in einer Box und Bauklötze in einer Truhe. Man kann mit Kindern thematisieren, was Gründe für die unterschiedlichen Aufbewahrungsorte sein könnten. Eventuell spielt dabei auch die jeweilige Anzahl eine Rolle: Gibt es von etwas „sehr viel“ lagert man es anders, als wenn es nur „wenig“ davon gibt. Dass natürlich auch Eigenschaften der Gegenstände selbst eine Rolle dabei spielen, soll nicht ausgeblendet werden. Mathematische Sichtweisen auf den Alltag sollen eine Bereicherung sein, keine Einengung. Dinge einfach nur zu Zählen um des Zählens willen, ohne dass dies in einem sinnstiftenden Kontext steht, ist eher kritisch zu bewerten.

Wovon gibt es (zuhause, in der KiTa, auf der Welt) „wenig“, wovon „viel“, wovon „sehr viel“? Was gibt es an unserem Körper einmal, was zweimal, was mehrfach (Finger, Zehen, Zähne), was sehr zahlreich (Haare, Knochen)? Später lassen sich diese Kategorien weiter verfeinern, indem beispielsweise Mengen mit zwischen null und zehn Elementen auch explizit mit dem Zahlwort klassifiziert und miteinander verglichen werden: „sechs Ameisen sind mehr Tiere als drei Elefanten, vier Blumen sind zu wenig, um damit acht Vasen zu schmücken“.

4.2 Veränderungen vornehmen und beschreiben

„Hier fehlen noch zwei Handtücher, und die Pinsel brauchen wir nicht alle, davon können wir einige wegräumen“. Durch Aufeinanderstapeln von Bauklötzen wächst ein Turm in die Höhe, beim Abbauen nimmt seine Höhe mit jedem Stein, den man wegnimmt wieder ab. Wachsende Mengen beanspruchen mehr Platz, schrumpfende Mengen geben Raum frei. „Was würde passieren, wenn…“ sind Fragen, die mentales Operieren anregen und somit einen Zugang zu Veränderungsprozessen ermöglichen, die sich immer entlang einer zeitlichen Abfolge vollziehen. Spielerische Situationen, bei denen Streichhölzer, Spielmarken, Punkte oder Ähnliches „gesammelt“ werden (und evtl. auch wieder verloren gehen können) machen Anzahlveränderungen erfahrbar. Ebenso können Fingerspiele, bei denen Finger ein- und ausgeklappt werden, auch ohne unmittelbaren Zahlenbezug einen Beitrag zur Zahlbegriffsentwicklung leisten. Später können dann auch Zahlwörter dazukommen, wenn zum Beispiel ein Finger nach dem anderen weggeklappt wird, bis von den „zehn kleinen Zappelmännern“ keiner mehr übrig ist. Dabei ist es aber sinnvoll, nicht immer die gleiche Reihenfolge der Finger einzuklappen, damit die Kinder die Zahl als Eigenschaft der Gesamtmenge und nicht als Eigenschaft einzelner Finger erfahren.

Knobeln

Zwei Kinder erhalten je drei Spielmarken und spielen gegeneinander „Schere, Stein, Papier“. Gibt es in einem Durchgang einen Sieger, erhält dieser vom Partner eine Marke. Eine Runde ist dann gewonnen, wenn ein Kind alle sechs Spielmarken in seinen Besitz bringt. Alternativ können die Kinder auch aus einem Vorrat Marken für einen Sieg erhalten oder bei einer Niederlage Marken aus dem eigenen Vorrat in einen gemeinsamen „Topf“ geben. Statt Wettbewerbsspielen sind natürlich auch kooperative Spiele, bei denen gemeinsam Vorräte aufgefüllt werden, geeignet.

4.3 Mengen in Teilmengen zerlegen und aus Teilmengen zusammensetzen

Autos und Bauklötze als Mengen

Mit Puzzlespielen existiert ein vorzügliches Material, mit denen die Teile-Ganzes-Beziehung Gestalt erhält. Allerdings steht dabei nicht der Mengenaspekt im Mittelpunkt: Das fertige Motiv ist buchstäblich mehr als die Summe seiner Teile, seine Zusammensetzung aus Einzelstücken tritt gegenüber der Ganzheit des Produktes in den Hintergrund. Etwas anders verhält es sich, wenn mit Autos oder Eisenbahnwaggons gespielt wird: es lassen sich unterschiedliche Aufteilungen der immer gleichen Menge ausprobieren, z. B. stehen einige Autos in der Garage, einige fahren auf der Straße und einige parken am Straßenrand, oder die Waggons bilden mehrere Züge, die durch Umrangieren neu zusammengestellt werden können. Dabei lässt sich sprachlich differenzieren zwischen „den“ Autos generell und „den Autos, die…“ eine Teilmenge mit entsprechenden Eigenschaften bilden. Auch das Bauen mit Bauklötzen kann unter diesem Aspekt gesehen werden: Gruppierungen ändern sich, wenn dabei aber keine Klötze ganz aus dem Spiel genommen oder neue hinzugefügt werden, dann ist das „Ganze“, der Haufen Klötzer, eine Konstante, während die „Teile“, einzelne Bauwerke, veränderlich sind. Hierbei lässt sich die Aufmerksamkeit auf beide Aspekte lenken: „Welche Steine hast du insgesamt verbaut, so viele… Und welche davon gehören zu dem Haus… Wenn das Haus noch größer werden soll, wo kannst du dafür noch Teile hernehmen… Wenn wir hier welche wegnehmen und sie da dazutun, haben wir dann immer noch genauso viele wie zuvor?". Zumindest bei kleineren Mengen bietet sich an, bereits die Anzahl mit in den Blick zu nehmen. So können Kinder animiert werden, unterschiedliche Aufteilungen kleiner Mengen vorzunehmen und diese auch zu dokumentieren, zum Beispiel durch eine Zeichnung, später dann durch Symbole oder auch bereits mit Zahlzeichen, sofern diese schon bekannt sind. Durch die Möglichkeit, mit konkreten Materialien zu operieren, haben solche Übungen einen sehr spielerischen Charakter und wirken von außen betrachtet wesentlich weniger „mathematisch" als Zählübungen oder Ziffernschreibübungen. Dennoch sind sie in ihrem Bildungsgehalt aber nicht zu unterschätzen. Das reflektierte Tätigsein ist, ganz im Sinne Fröbels, einer kognitiven „Belehrung" weit überlegen. Die Aktualität des Fröbelschen Verständnisses wird auch deutlich, wenn man sich mit dem gesamten Prozess des Mathematiklernens über die frühe Kindheit hinaus auseinandersetzt. Einerseits mehren sich die Erkenntnisse, dass das spezifische Vorwissen der Kinder ein wichtiger Prädiktor für den weiteren Lernzuwachs ist, andererseits wächst das Bewusstsein darüber, dass Lernprozesse keine bloßen Adaptionen sind, sondern stets Elemente der Bedeutungszuweisung und –aushandlung beinhalten. Aus mathematikdidaktischer Sicht ist das Potential, das in qualitativ angeleitetem und/oder begleitetem, materialbasiertem Spiel in der Kindergartenstufe in Bezug auf frühes mathematisches Lernen im Allgemeinen und der Zahlbegriffsentwicklung im Besonderen verborgen liegt, in der Praxis (noch) nicht umfassend ausgeschöpft. Die weitgehend fruchtlose Diskussion, ob „Spielorientierung" oder „Lernorientierung" der erfolgversprechendere Ansatz im Kindergarten sei, wäre in diesem Sinne durch eine substanzielle Qualitätsdiskussion zu ersetzen: In erster Linie kommt es auf die Inhalte an, und diese sind bereits auf der Kindergartenstufe alles andere als banal.

Gehege im Streichelzoo

Zu einem Spielarrangement gehören sechs „Ziegen" und ein „Gehege" mit „Wiese", „Stall", „Futterkrippe" und „Wasserstelle". Die Aufgabe besteht darin, die Tiere innerhalb des Geheges in unterschiedlichen Konstellationen aufzustellen und diese zu dokumentieren. Dazu kann ein Stapel Blätter bereitstehen, auf denen jeweils skizzenhaft das „Gehege" dargestellt ist, und auf denen die Tiere in Form von Ovalen eingezeichnet werden. Die Möglichkeiten sind vielseitig: Vier Kombinationen, bei denen alle Tiere am gleichen Ort sind, 30 Varianten bei der Verteilung auf zwei Orte, 40 Varianten, bei denen die Tiere auf drei Orte verteilt sind und weitere 10 Varianten, bei denen an jedem der vier Orte mindestens ein Tier vorhanden ist – insgesamt nicht weniger als 84 Kombinationen. Mathematisch bedeutet das, dass es 84 Terme der Form a+b+c+d gibt (a, b, c, d jeweils natürliche Zahlen zwischen 0 und 6), deren Wert genau 6 beträgt: 6+0+0+0,

0+6+0+0, 0+0+6+0, 0+0+0+6, 5+1+0+0, 5+0+1+0, 5+0+0+1, 0+5+0+1, 0+5+1+0, 1+5+0+0, 0+0+5+1, 0+1+5+0, 1+0+5+0, 0+0+1+5, 0+1+0+5, 1+0+0+5, 4+2+0+0, 4+0+2+0, 4+0+0+2, 0+4+2+0, 0+4+0+2, 2+4+0+0, 0+0+4+2, 0+2+4+0, 2+0+4+0, 0+0+2+4, 0+2+0+4, 2+0+0+4, 3+3+0+0, 3+0+3+0, 3+0+0+3, 0+3+3+0, 0+3+0+3, 0+0+3+3,
die 40 Varianten mit einer Null als Summand sowie 3+1+1+1, 1+3+1+1, 1+1+3+1, 1+1+1+3, 2+2+1+1, 2+1+2+1, 2+1+1+2, 1+2+2+1, 1+2+1+2, und schließlich 1+1+2+2.

5. Zusammenfassung

Die Entwicklung des Zahlbegriffs ist ein äußerst komplexes Geschehen, bei dem unterschiedliche Bausteine ausdifferenziert und aufeinander bezogen werden müssen. Die Praxis ist zum Teil noch wesentlich geprägt durch die Theorien Piagets, obwohl seine Aussage, dass Kinder erst ab einem Alter von sechs Jahren in der Lage sind, ein umfassendes Zahlverständnis auszubilden und davor eher pränumerische Elemente Bestandteile der mathematischen Förderung sein sollten, längst als zu undifferenziert gilt. Besonders die Bedeutung der sogenannten protoquantitativen Schemata, die von Resnick bereits Ende der 1980er Jahre beschrieben wurden, ist nicht zuletzt im Rahmen der Rechenschwächeforschungen seit den 1990er Jahren erkannt worden. Hierzu lassen sich bereits mit den Jüngsten Arrangements und Sprachanlässe schaffen, die die Kinder für Vergleiche, Veränderungen und unterschiedliche Gruppierungen sensibilisieren und sie so in ihrer Entwicklung unterstützen.

6. Fragen und weiterführende Informationen

6.1 Fragen und Aufgaben zur Bearbeitung des Textes

?

FRAGE 1:

Weshalb sind auch solche Elemente der Piagetschen Theorie bis heute populär, die seit Jahrzehnten als überholt gelten?

?

FRAGE 2:

Wieso erfordert die Wahrnehmung einer Mengenveränderung eine weitergehende intellektuelle Leistung als der Vergleich zweier Mengen?

!

AUFGABE 1:

Beschreiben Sie die Bedeutung, die den protoquantitativen Schemata nach Resnick für die Entwicklung des Zahlbegriffs zukommt mit eigenen Worten.

!

AUFGABE 2:

Wenn Sie etwas mathematisch knobeln mögen: Finden Sie die 40 Variationen der „Streichelzoo"-Aufgabe, bei denen die sechs Tiere auf genau drei Orte verteilt sind. Oder modellieren Sie die Aufgabe dahingehend, dass a) fünf Tiere und drei Orte zur Verfügung stehen sowie b) vier Tiere und vier Orte.

!

AUFGABE 3:

Nicht im Artikel angesprochen, aber auch ein Baustein zur Zahlbegriffsentwicklung ist die Fähigkeit des „Subitizings", d. h. kleinere Anzahlen „auf einen Blick" erkennen zu können. Recherchieren Sie dazu eigenständig weiter, z. B. mit Hilfe des Onlinetextes von Gerster und Schultz.

6.2 Literatur und Empfehlungen zum Weiterlesen

LITERATUR-VERZEICHNIS

Fritz, A,; Ricken, G. (2008): Rechenschwäche. München: Reinhardt

Gallistel, C. R.; Gelman, R. (1978): The child's understanding of number. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Hasemann, Klaus (2007): Anfangsunterricht Mathematik.München: Elsevier.

Moser-Opitz, E.(2008): Zählen, Zahlbegriff, Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen. 3. Aufl. Bern: Haupt.

Piaget, J.; Szeminska, A.(1972): Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde. Stuttgart: Klett-Cotta.

Resnick, Lauren B. (1983): A Developmental Theory of Number Understanding. In: Ginsburg (Hrsg.), The development of mathematical thinking (S. 109-151) New York: Academic Press.

Wynn, K. (1998): Psychological foundations of number: Numerical competence in human infants. Trends in Cognitive Sciences, 2, 296-303. (http://pantheon.yale.edu/~kw77/TICSWynn1998.pdf)

EMPFEHLUNGEN ZUM WEITERLESEN

Dehaene, S. (1999): Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können. Basel: Birkhäuser.

Gerster, H-D.; Schultz, R.(o. J.): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht : Bericht zum Forschungsprojekt „Rechenschwäche - Erkennen, Beheben, Vorbeugen". Verfügbar unter http://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/index/index/docId/16

Royar, Th.; Streit, Ch. (2010): Mathelino. Kinder begleiten auf mathematischen Entdeckungsreisen. Seelze: Kallmeyer

6.3 Glossar

Schema Ein angeborenes oder sehr früh erworbenes Denk- oder Verhaltensmuster.

Teile-Ganzes-Konzept Das Wissen darüber, dass sich Mengen in Teilmengen zerlegen lassen, ohne dass sich dabei die Gesamtmenge ändert, ist von fundamentaler Bedeutung für die Ausbildung eines tragfähigen Zahlkonzeptes. Zahlen dürfen nicht als Eigenschaften von Dingen und auch nicht als eigenständige Dinge aufgefasst werden, sondern als Kategorien mit stabilen Beziehungen.

Kardinalzahl Zahl, die die Elementeanzahl einer Menge beschreibt.

Ordinalzahl Zahl, die den Rangplatz in einer Reihenfolge beschreibt.

Zahlkonzept Mit dem Begriff „Zahlkonzept“ wird im Allgemeinen intuitives und explizites Wissen über Bedeutungen, Funktionen und Anwendungen von Zahlen in unterschiedlichen Kontexten beschrieben.

Invarianz Die Unverändertheit in Bezug auf z. B. Anzahl, Länge oder Volumen, obwohl sich die äußere Erscheinung geändert hat.

KiTa Fachtexte ist eine Kooperation der Alice Salomon Hochschule, der FRÖBEL-Gruppe und der Weiterbildungsinitiative Frühpädagogische Fachkräfte (WiFF). KiTa Fachtexte möchte Lehrende und Studierende an Hochschulen und Fachkräfte in Krippen und Kitas durch aktuelle Fachtexte für Studium und Praxis unterstützen. Alle Fachtexte sind erhältlich unter: www.kita-fachtexte.de

Zitiervorschlag:
Royar, T. (02.2015): Wo Piaget irrte – Zahlbegriffsentwicklung im Vorschulalter. Verfügbar unter: http://www.kita-fachtexte.de/XXXX (Hier die vollständige URL einfügen.). Zugriff am T T.MM.JJJJ